

DOMANI verso le 17,20, DOPO UN'ORA
DI LEZIONE, C'E' UN ALLENAMENTO
PER IL COMPITINO.

Ricordiamo come si calcola il pol. caratteristico

$$\det(tI - [T]) = P_T(t)$$

Esercizio di DIAGONALIZZAZIONE

Sia $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ endomorfismo

$$[T]_{st} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Dire se T è diagonalizzabile e, se
lo è, esibire una base di $\mathbb{R}^3$

costituita da autovettori.

SVOLGIMENTO

Cerchiamo gli autovettori di T .

Per fare questo calcoliamo $P_T(t)$

$$P_T(t) = \det \left(t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} t & -3 & 0 \\ -1 & t+2 & 0 \\ -1 & 3 & t-1 \end{pmatrix}$$

sviluppo rz. ultima colonna

$$= (t-1) \det \begin{bmatrix} t & -3 \\ -1 & t+2 \end{bmatrix} =$$

$$= (t-1) (\textcircled{1}t^2 + 2t - \textcircled{3}) =$$

$$= (t-1)(t-1)(t+3) =$$

$$= (t-1)^2(t+3)$$

Gli autovalori di T

sono

1

"con molteplicità
algebraica 2"

-3

con molteplicità
algebraica 1

1 è autovalore, allora vuol dire

che $\boxed{\text{Ker}(T - 1I)}$ non è

banale. I vettori $\neq 0$ in

$\text{Ker}(T - 1 \cdot I)$ sono gli autovettori relativi a 1.

Infatti:

$v \in \text{Ker}(T - 1 \cdot I)$ allora

$$(T - 1 \cdot I)v = 0$$

$$Tv - Iv = 0$$

$$v \in \text{Ker}(T - 1 \cdot I) \quad Tv = v = 1 \cdot v$$

v è autovettore con autovalore 1.
Calcoliamo:

$$\text{Ker}(T - I) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \text{span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dunque sono} \checkmark \text{ due autovettori}$$

relativi all'autovettore 1.

SONO LIN INDIP

Cerco gli autovettori relativi all'autovettore
-3.

$$\text{Ker} (T - (-3)I) =$$

$$= \text{Ker} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore relativo
a -3

Ho trovato dunque

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_3} \quad \text{AUTOVETTORI}$$

SONO LIN INDIP? sì

ho finito, perché ho trovato la

base di $\mathbb{R}^3$ cercata
Osservo che

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{la matrice}$$

ha rango 3

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{3} & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{-1} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \equiv$$

tre PIVOT

Nella base v_1, v_2, v_3 ho

$$\begin{bmatrix} T \\ v_1 \ v_2 \ v_3 \\ v_1 \ v_2 \ v_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Teorema Dato un endomorfismo
lineare $T: V \rightarrow V$ siano

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ autovalori distinti
fra loro.

Siano $v_1, v_2, \dots, v_k$ autovettori t.c.

$$T v_1 = \lambda_1 v_1$$

$$T v_2 = \lambda_2 v_2$$

$$Tv_k = \lambda_k v_k$$

Allora $v_1, v_2, \dots, v_k$ sono LIN
INDIPENDENTI.

Dim Per induzione su k .

PASSO BASE $k=1$

$$Tv_1 = \lambda_1 v_1$$

v_1 è lin INDIP (ovvio)
perché $v_1 \neq 0$

PASSO INDUTTIVO Sia $k > 1$.

Supponiamo che l'enunciato sia
vero per $k-1$ vettori

Li ho $v_1, \dots, v_k$ come nell'enunciato
Devo dim che sono LIN. INDIP.

$$(*) \quad a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = 0$$

dim che $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$

Applico la T ad entrambi i
membri di $(*)$

$$T(a_1 v_1 + \dots + a_k v_k) = T(0)$$

$$a_1 T v_1 + \dots + a_k T v_k = 0$$

$$(**) \quad a_1 \lambda_1 v_1 + \dots + a_k \lambda_k v_k = 0$$

Moltiplico $(*)$ per λ_1

$$a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_1 v_2 + \dots + a_k \lambda_1 v_k = 0$$

Sottraggo $(**)$ a $(***)$ e ottengo

$$a_2 (\lambda_1 - \lambda_2) v_2 + \dots + a_k (\lambda_1 - \lambda_k) v_k = 0$$

è un'equazione che coinvolge solo
i vettori $v_2, v_3, \dots, v_k$

che sono $k-1$.

Per ipotesi induttiva so che

$v_2, v_3, \dots, v_k$ sono L.I. INDIP.

Allora deve essere

$$a_2(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$$

$$a_3(\lambda_1 - \lambda_3) = 0$$

...

$$a_k(\lambda_1 - \lambda_k) = 0$$

quindi, dato che $\lambda_1 - \lambda_s \neq 0 \ \forall s \geq 2$

deve essere $a_2 = a_3 = \dots = a_k = 0$

Tornando alla $(*)$, vede che allora
anche $a_1 = 0$



Def Dato $T: V \rightarrow V$ endomorfismo
e dato λ autovalore per T

lo spazio $\ker (T - \lambda I)$
si chiama V_λ , "autospazio
relativo a λ ".

Oss Innanzitutto osserviamo che in realtà

$V_\lambda = \ker (T - \lambda I)$ si può
definire $\forall \lambda \in K$: se λ non è
autovalore $V_\lambda = \{0\}$, se λ è
autovalore $V_\lambda \neq \{0\}$

Oss Chi è V_0 ?

$$V_0 = \text{Ker}(T - 0I) = \text{Ker} T$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ T \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ autovettore autovettore.

Teorema Dado T endomorfismo $: V \rightarrow V$

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_K$ autovalori distinti
fra loro. Allora

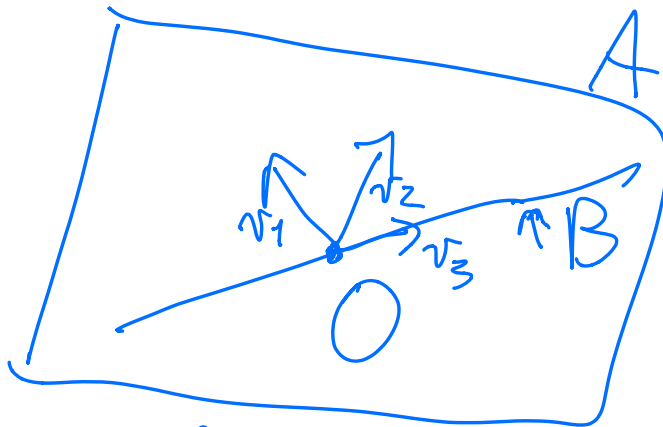
$$V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_K} \text{ zans}$$

IN SOMMA DIRETTA

Ricardo

una dritta

se A, B sono in somma diretta
 $\dim(A+B) = \dim A + \dim B$



qui A e B non sono in somma diretta

$$A+B = A$$

v_1, v_2, v_3

NON È BASE
 di $A+B$

STUDIARE DIM. del TEOREMA

(pag 7 dispense)

Es. Sia $F_a: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} F_a \end{bmatrix}_{st} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ F_a è diagonalizzabile?

SVOLGIMENTO

$$P_{F_a}(t) = \det \left(tI - \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= (t-a) (t^2 - (a+2)t + 2a+1)$$

$$\Delta = \sqrt{a^2 - 4a}$$

$$\lambda_1 = \frac{a+2 + \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{a+2 - \sqrt{a^2-4a}}{2}$$

$$\lambda_3 = a$$

PRIMA DOMANDA : $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$?

$$a^2 - 4a \geq 0$$

e questo accade per $a \geq 4$ o

$$a \leq 0$$

se $0 < a < 4$ $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$

e non sono autovalori per il nostro problema su $\mathbb{R}$.

Studiamo il caso $a \geq 4$ o $a \leq 0$

Quando può accadere che alcuni dei

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ coincidono?

$$\frac{a+z-\sqrt{a^2-4a}}{2} \stackrel{?}{=} \frac{a+z+\sqrt{a^2-4a}}{2}$$

equivalente

$$-\sqrt{a^2-4a} = \sqrt{a^2-4a}$$

~~eq~~ se e solo se

$$a^2-4a=0$$

$$\text{se e solo se } a=0 \vee a=4.$$

Ora chiediamoci se

$$\frac{a+z-\sqrt{a^2-4a}}{2} \stackrel{?}{=} a \quad \text{MAI}$$

infatti

equivalente

$$a+2 - \sqrt{a^2-4a} = 2a$$

$$-\sqrt{a^2-4a} = a-2$$

se questa fosse vera sarebbe vera anche

$$a^2-4a = (a-2)^2$$

$$a^2-4a = a^2-4a+4$$

FALSA

analogamente

$$\frac{a+2 + \sqrt{a^2-4a}}{2} = a \quad \text{MAI}$$

Riassumendo, se $a > 4$ e $a < 0$

$$\begin{array}{ccc} & \lambda_1 & \\ \neq & & \neq \\ \lambda_3 & & \lambda_2 \\ \neq & & \end{array}$$

Per i teoremi visti oggi,

$$\neq 0 \quad \text{se } v_1 \in V_{\lambda_1}$$

$$0 \neq v_2 \in V_{\lambda_2}$$

$$0 \neq v_3 \in V_{\lambda_3}$$

allora v_1, v_2, v_3 SONO L.I.

L.I.P. e danno una base

di autovettori per F_a , che

dunque è diagonalizzabile.

CONTINUATE VOI:

STUDIATE COSA ACCADE per

gli altri valori di a :

$$a = 0$$

$$a = 4$$

$$\text{e } 0 < a < 4.$$

TROVATE QUESTO ESERCIZIO SVOLTO
SULLE DISPENSE